

二段平歯車装置の振動解析

Vibration analysis of a dual-stage spur geared mechanical system

By Prof. Shuting Li

In order to be able to accurately analyze the vibration of geared mechanical systems, the studies on constructing a vibration analysis method and developing software were begun very early by combining the theoretical modal method and the Duhamel integral method. But these studies could not be completed for a long time because stable results could not be obtained in some cases. Through many years of effort, the cause of the unstable results was found finally, and it succeeded in developing software that can obtain stable results in all cases. This paper explains the technical difficulties that must be overcome when analyzing the vibration of geared mechanical systems at the first. Then the flowchart used for numerical analysis of gear vibration and software development is introduced using the theoretical modal method and the Duhamel integral method. In order to verify the validity of the developed software, a vibration analysis on a two-stage spur gear system is performed. Since the calculated results are almost consistent with the experimental results, it can be said that a reliable way is found to analyze geared mechanical systems. The results analyzed by the newly developed software provide some new insights into the phenomenon of gear vibration.

Key Words : Gear, Spur Gear, Geared Machines, Modeling, Vibration Analysis, Acceleration

1. 結 言

歯車は様々な回転機械の減速・増速運動に利用され、回転機械を構成する非常に重要な一部分となっている。歯車の振動・騒音は回転機械の振動・騒音に直接影響を及ぼしているため、その振動・騒音低減も回転機械の振動・騒音低減に直接繋がっている。歯車の振動・騒音を低減するために、理論上で歯車の振動を正確に解析する必要があるが、歯車振動に及ぼす要因が多いため、歯車振動解析問題はまだ完全に解決されていないのが現状である。

歯車を用いた機械システムの振動を正確に解析できるようにするために、多くの研究者はこの研究に取り組んだ。著者も1987年から理論モード法と Duhamel 積分法を併用することにより、歯車の振動解析法の構築及び専用ソフトの開発を始めたが、解析対象によって安定した結果が得られないケースもあったので、長い間、この研究に苦しんだ。そして長年の努力を重ねて、遂に不安定な結果を引き起こす要因を突き止めて、すべてのケースに対して、安定した結果が得られるようにソフト開発に成功した。

本研究では、歯車を用いた機械システムの振動を解析する時に克服しなければならない技術難点を解説しながら、理論モード法と Duhamel 積分法の併用による歯車振動の数値解析とソフト開発の流れを紹介する。そして開発したソフトの妥当性を検証するために、二段平歯車減速機構に対する振動解析を行い、また解析結果を実験結果との比較を行い、解析結果は実験結果とほぼ一致しているため、動力吸収式歯車試験機と動力循環式歯車試験機などの機械システムに対して振動解析も行い、いずれにしても妥当な結果が得られた。更にこれらの解析結果を分析したところ、歯車振動に関する新しい知見を発見した。

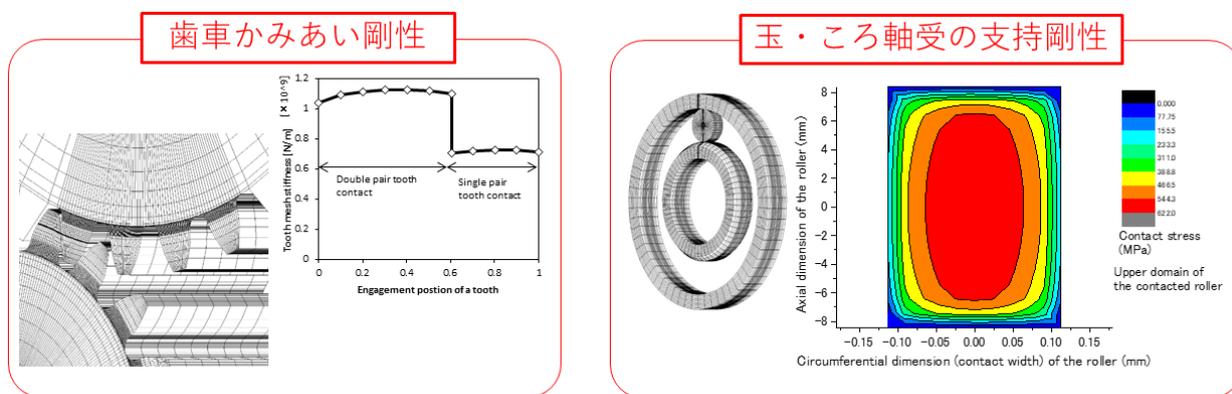
2. 歯車振動解析の技術難点

歯車の振動が解析できるようにするために、まず次に示す技術難点を克服しなければならない。(1) 歯のかみあい剛性と軸受の支持剛性の理論解析；(2) 振動解析に歯の分離現象の取り扱い；(3) 振動に及ぼす歯の加工誤差・組立誤差及び歯形修整の影響；(4) 非線形運動方程式の解き方；(5) 薄肉歯車の構造振動を解

析する場合の構造振動応答の求め方（大規模・多自由度の構造振動の解析技術）；（6）異なる振動モードは重複か近い周波数を持つ場合の振動応答の求め方．これらの難点を克服するために、長年の研究及び継続的な努力が必要なので、歯車振動が簡単に解析できないことが分かる．

歯車振動を解析するために、まず一對の歯車の歯のかみあい剛性を求める必要がある．歯のかみあい剛性は歯のかみあい位置（回転角度）により変化し、また歯の形状（インボリュート曲線、転位係数、ねじれ角度など）の影響も受けるので、一般的に歯のかみあい剛性が簡単に求められないことがよく知られている．本研究の場合には、一對の平歯車の歯のかみあい剛性を一對の弾性体の接触問題として取り扱い、図 1(a)に示すように専用三次元有限要素法（3D-FEM）の構築及びソフトの開発を行うことにより求めた⁽¹⁾．その結果も図 1(a)に示している．

歯車振動に及ぼす軸受の支持剛性の影響を調べるために、軸受の支持剛性を理論上で求める必要があるが、この支持剛性も簡単に求める方法がないため、本研究の場合では、長年の研究と努力で専用 3D-FEM ソフトを開発し、深溝玉軸受、アンギュラー玉軸受、円筒ころ軸受、円すいころ軸受などの支持剛性が求められるようにした⁽²⁾⁽³⁾⁽⁸⁾．図 1(b)に円筒ころ軸受の接触解析のための FEM モデル及び開発した専用 FEM ソフトで解析したころ表面の接触面圧分布を示している．また支持剛性については文献⁽²⁾⁽³⁾⁽⁸⁾に示している．



(a) FEM model and Tooth mesh stiffness

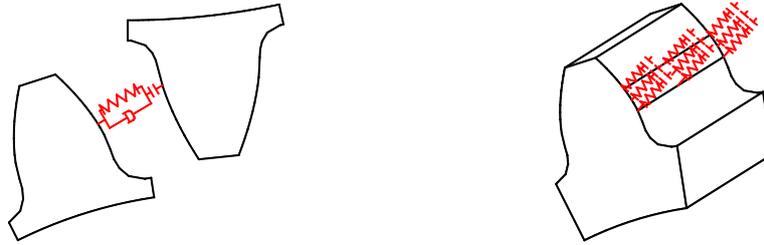
(b) FEM model and pressure of rolling bearings

Fig.1 Contact stiffness analyses of gears and bearings using FEM

歯の分離現象及び振動に及ぼす歯の加工誤差・組立誤差と歯形修整の影響について、多くの研究がなされていたので、この部分の説明は省略するが、本研究での新しい取り込みだけをここで簡単に紹介する．従来の場合には、歯のかみあい剛性は図 2(a)に示すように一本のバネで置き換えられ表現されている．そしてこのバネの先端に隙間要素（図 2(a)参照）を付けることにより歯の分離現象及び振動に及ぼす歯の加工誤差及び歯形修整の影響が解析されていた．しかし、一本のバネで複雑な歯面接触状況がうまく表現できないと思ったので、図 2(b)に示すように多数のバネで歯面接触状況を表現すべきであると思い、図 2(b)に示す多数のバネで接触する面接触モデルを提案した⁽⁴⁾．そしてこの面接触モデルを用いて一對の平歯車の静的な接触問題を解析した⁽¹⁾とともに、振動解析ソフトも開発した⁽⁴⁾．しかし、この面接触モデルで解析した結果の妥当性がまだ検証できていないため、本論文では、まず一本のバネで解析した結果を述べる．近い将来、多数のバネで解析した結果を公表する予定である．

図 2(a)に示すように歯のかみあい剛性は一本のバネで表現される場合には、歯のかみあい位置により、歯のかみあい剛性が非線形的に変化するので、歯車振動解析のために導いた運動方程式も非線形方程式となる．この非線形運動方程式が解けるようにするために、非線形運動方程式の線形化を行った⁽⁵⁾．

航空・宇宙機械開発の場合には、軽量化のために、歯車のリム・ウェブの厚みを薄肉化しなければならない。この薄肉化により、リム・ウェブの構造振動が発生するので、この構造振動を解析するために、3D-FEMの使用が必要である。即ち、大規模（多くの自由度）の構造振動応答の求め方を構築する必要がある。また異なる振動モードは重複か近い周波数を持つ場合⁽⁶⁾には、従来の方法で振動応答が求められなくなるので、新しい方法の開発が必要である。薄肉歯車の振動について、振動モードや周波数解析に関する研究⁽⁶⁾が行われて、また振動現象の実験研究も行われた⁽⁶⁾が、振動応答解析に関する研究⁽⁷⁾が僅かであり、解析結果の妥当性もあまり検討されていなかったため、この問題は未解決問題として残っている。



(a) Conventional one-spring model (b) Newly proposed multiple-springs model

Fig.2 Contact models of contact teeth used for vibration analysis of gears

3. 歯車振動解析理論及び専用ソフトの開発

歯車を用いた機械システムの振動応答を求めるために、図3に示すフローチャートで専用ソフトを開発したが、このソフトで振動応答を解析したところ、解析対象によって、結果が不安定になる問題が発生したので、長年の理論と実験研究を通して、この問題の解決に取り組んだ。そして多くのノウハウを掴んだとともに、不安定な要因も突き止めて、解析結果を安定させる方法も見つけた。現在、動力吸収式歯車試験機、動力循環式歯車試験機、二段歯車減速機などの機械システムに対する振動解析を行い、すべての解析で安定した結果が得られたので、一例として二段平歯車減速機構に対する振動解析結果を次に紹介する。スペースの都合上、その他の機械システムに対する振動解析結果はここで省略する。

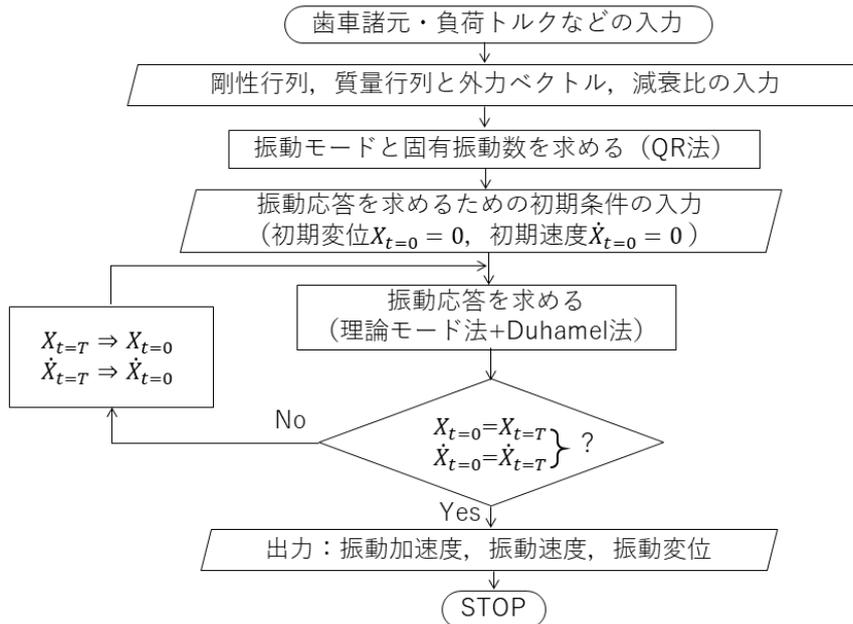


Fig.3 Flow-chart of software development used for gear vibration analysis

4. 開発した振動解析ソフトの応用例

開発したソフトの妥当性を検証するために、まず図4に示す二段平歯車減速機構に対して振動解析モデリングを行った。その結果を図5に示している。そして図5に示すモデルを用いてラグランジュ法で運動方程式を導いた。最後に導いた運動方程式を図3に示す流れと開発したソフトで解けば、各質点の振動変位、振動速度と振動加速度が得られる。

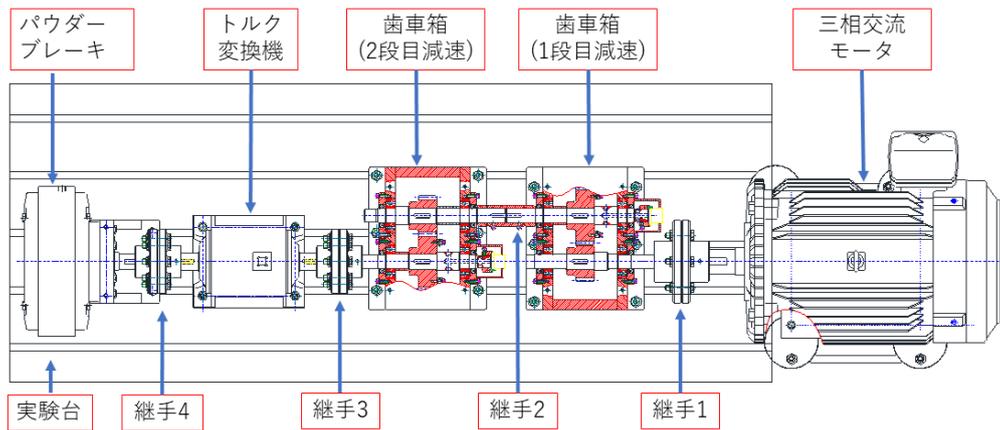


Fig. 4 A dual-stage geared mechanical system

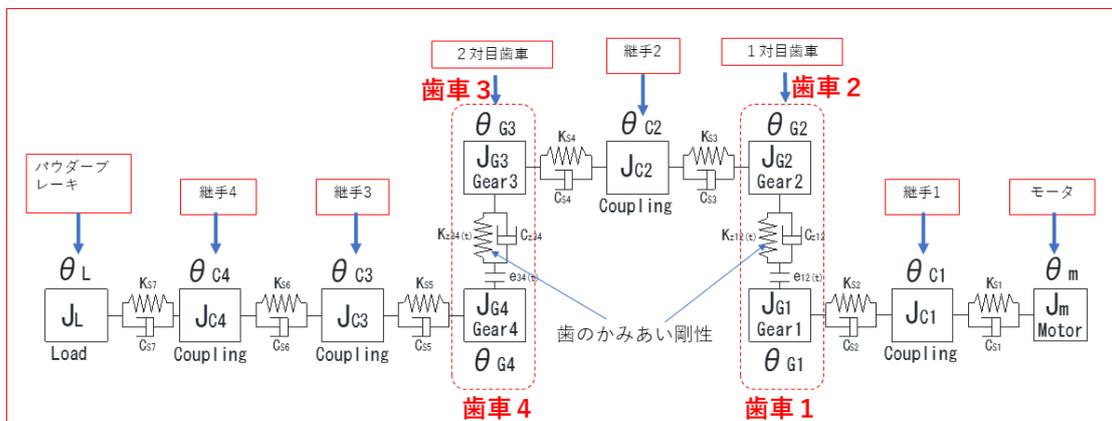
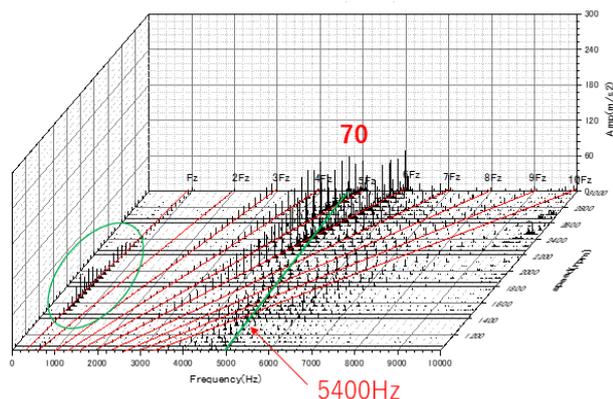
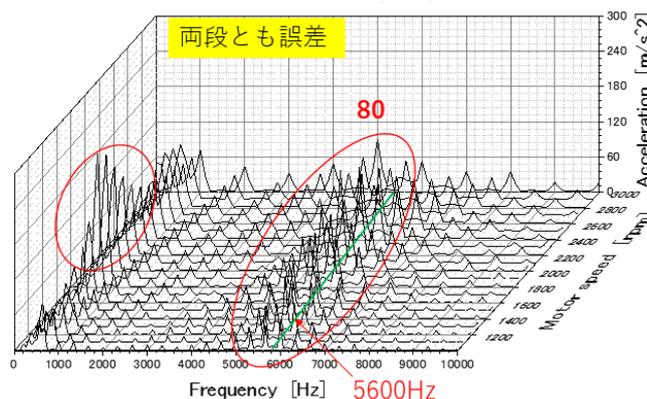


Fig. 5 Modeling for vibration analysis of the geared mechanical system

図6と図7に歯車4の回転方向の振動加速度応答を用いて作成したキャンベル線図を示す。図6(a)と図7(a)は実験で測定した振動加速度信号のキャンベル線図であり、図6(b)と図7(b)はソフトで解析した振動加速度信号のキャンベル線図である。解析の際には、二対の歯車の歯形誤差とピッチ誤差が含まれていた。図6は負荷トルク=110Nm時の比較であり、図7は負荷トルク=306Nm時の比較である。図6(a)と図6(b)を、また図7(a)と図7(b)を比較することにより、ソフトで解析した結果は実験で測定した結果とほぼ一致していることが分かる。

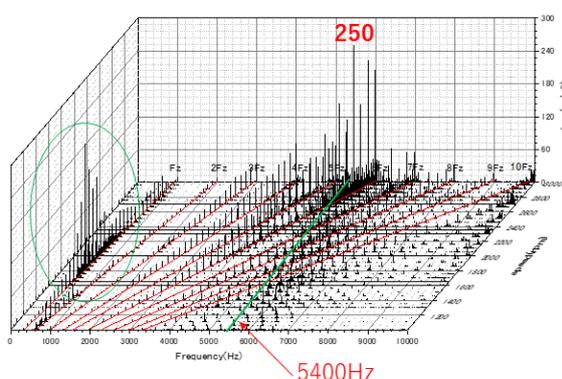


(a) Measured accelerations

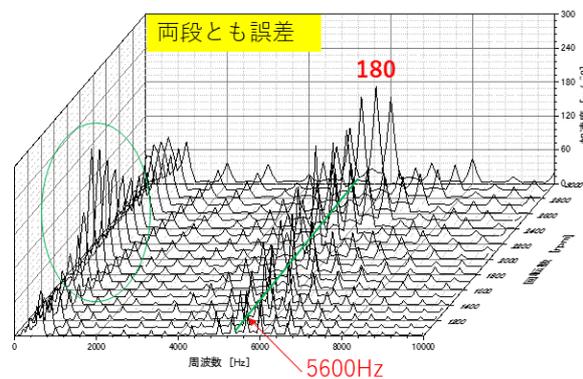


(b) Calculated accelerations

Fig.6 Campbell diagram comparison of gear accelerations (Torque=110Nm)



(a) Measured accelerations



(b) Calculated accelerations

Fig.7 Campbell diagram comparison of gear vibration accelerations (Torque=306Nm)

7. 結 語

1. 理論モード法と Duhamel 積分法に基づき、歯車を用いた機械システムの振動解析法を構築しながら、振動解析専用ソフトを開発した。
2. 開発したソフトを用いて、二段歯車減速装置に対して振動を解析し、解析結果を実験結果と比較したところ、解析結果は妥当であることが分かった。また歯車を用いたその他の機械システムに対する振動においても妥当な結果が得られた。
3. 長年の理論と実験研究により、歯車振動に関する多くの研究ノウハウを掴んだとともに、理論モード法と Duhamel 積分法の併用により歯車を用いた機械システムの振動が解析できることが判明した。
4. 開発したソフトで解析した歯車振動の結果を分析したところ、歯のかみあい周波数の一倍成分 f_z は歯の加工誤差により生じたものであることが判明した。また歯の共振周波数もうまく解析できた。
5. 歯車振動解析に関する新しい手法を構築できたので、将来、この手法はヘリコプターや風力発電装置などの複雑な機械システムの振動解析への応用が期待できる。

文責：島根大学総合理工学部機械設計研究室教授 李 樹庭
2026年2月22日 Email: shutingnpu@yahoo.co.jp

文 献

1. 李 樹庭, 石田 武, “組立誤差を持つ三次元構造薄肉平歯車の歯面荷重の計算法”, 日本機械学会論文集 (C編) 第63巻615号 (1997年11月掲載), pp.4017-4024.
2. Shuting Li, “Strength analysis of the roller bearing with a crowning and misalignment error”, *Engineering Failure Analysis*, Vol. 123, (2021), 105311.
3. Shuting Li, “A mathematical model and numeric method for contact analysis of rolling bearings”, *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 119 (2018), pp.61-73.
4. Shuting Li and A. Nishimura, “Dynamic Behavior Analysis of a Pair of Ground Spur Gears”, *The 6th International Conference on Manufacturing, Machine Design and Tribology (ICMDT2015)*, FR-A-1-2, Japan, pp.186-187.
5. 李 樹庭, 劉 更, 何 大為, 沈 允文, “歯車伝達システムの非線形振動運動方程式を解く繰り返し摂動法”, 機械科学与技術 (中国語), Vol.34, 増刊 (1994年5月掲載), pp.44-50.
6. Shuting Li, “Study on dynamic behavior of three-dimensional, thin-rimmed spur gears”, *The JSME International Conference on Motion and Power Transmissions in Fukuoka (MPT2001-Fukuoka)*, Vol. 1, (2001), pp.15-20.
7. 劉 更, 方 宗徳, 沈 允文, “はすば歯車の歯の動的な応答に関する研究”, 歯車 (中国語), 第14巻第2号 (1990年4月掲載), pp.20-23.
8. 李 樹庭, “設計から強度計算まで学ぶ 歯車の実用設計”, 科学情報出版社出版, 2025年2月